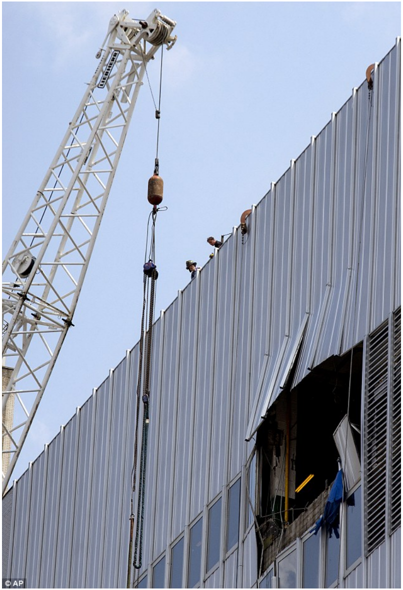
Optimale regelaars voor een slinger en de toepassing bij een hijskraan

Hidde Wieringa hidde@hiddewieringa.nl

Bacheloropdracht Technische Wiskunde – Universiteit Twente
29 januari 2016


© AP

Inhoud

Optimal Control

Probleem: De slinger

Toepassing: De kraan

Conclusie

Optimal Control

Dynamisch systeem $x(t)$

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, T]$$

of gelineariseerd

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \qquad t \in [0, T]$$

Invoer $u(t)$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, T]$$

of gelineariseerd

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0. \qquad t \in [0, T]$$

Optimal Control: Vind optimale regelaar u zodat x doet wat je wilt.

Optimaliteit

Wat wil je? Optimaliteit!

Kostenfunctie J

$$J(x,u) = \int_0^{T_*} L(x,u)\mathrm{d}t.$$

Costates $p(t)$.

Definieer Hamiltoniaan H

$$H(x,p,u) = p^T f + L.$$

Pontryagin's Minimum Principle

$$u_* = \operatorname*{argmin}_v H(x,p,v).$$

Probleem: De slinger

Een slinger met hoek θ en invoerkracht u

$$\ell\ddot{\theta} = -g\sin(\theta) + u.$$

We nemen $|u| \leq 1$, $x_1 = \theta$ en $x_2 = \dot{\theta}$.

Als gelineariseerd systeem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\ell} \end{pmatrix} u$$

met

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = (0,0)^T.$$

Bepalen van de optimale regelaar

Kostenfunctie voor slingerprobleem

$$J(x,u) = \int_0^{T_*} 1 \mathrm{d}t = T_*.$$

Hamiltoniaan

$$H(x,p,u) = p^T f + L = \left(x_2 p_1 - \frac{g}{\ell} x_1 p_2 + \frac{u}{\ell} p_2 \right) + 1.$$

Invoer u

$$u(t) = \operatorname*{argmin}_v H(x,p,v) = -\mathrm{sgn}(p_2).$$

Dit is een *bang-bang* regelaar: $u = 1$ of $u = -1$.

Klaar! *Of toch niet...*

Oplosmethode

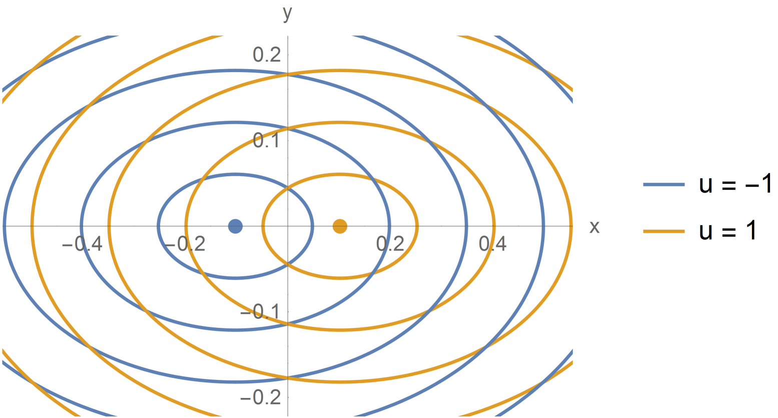
Invoer u wisselt een aantal keer van waarde. Stel dat $u = \hat{u}$. Kijk naar

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\frac{g}{\ell}x_1 + \frac{1}{\ell}\hat{u}}{x_2}.$$

Oplossing

$$\left(x_1 - \frac{1}{g}\hat{u}\right)^2 + \frac{x_2^2}{g/\ell} = C.$$

Dit zijn ellipsen!



Welke ellipsen komen in $(0, 0)$ uit?

Straal $1/g$ en middelpunt $(\pm 1/g, 0)$.

De costates voldoen aan

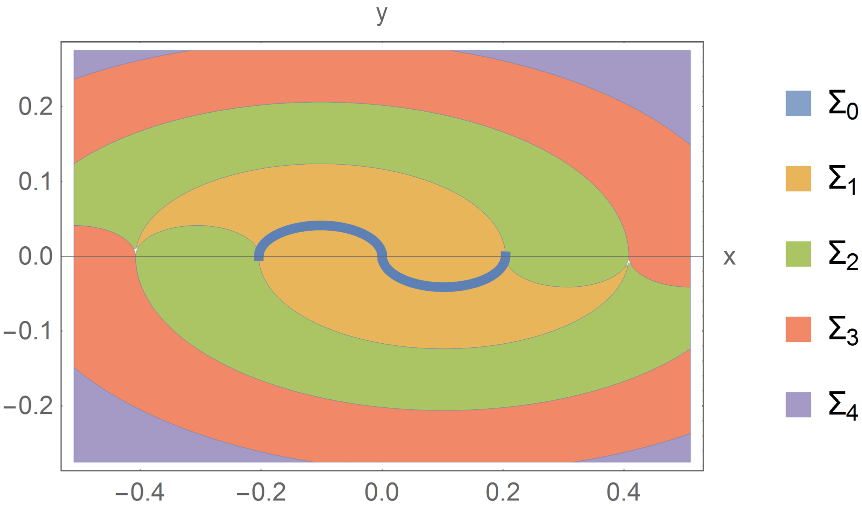
$$\dot{p} = -A^T p$$

dus

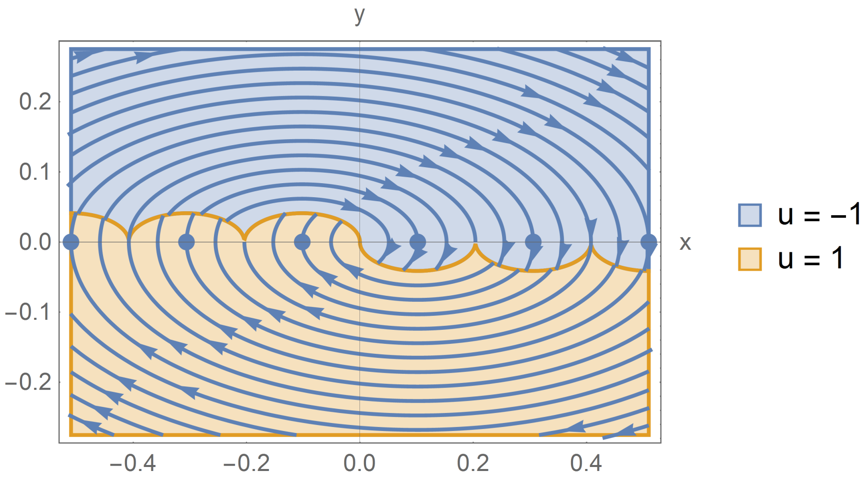
$$p_2 = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + C_2\right)$$

met vrije C_1 en C_2.

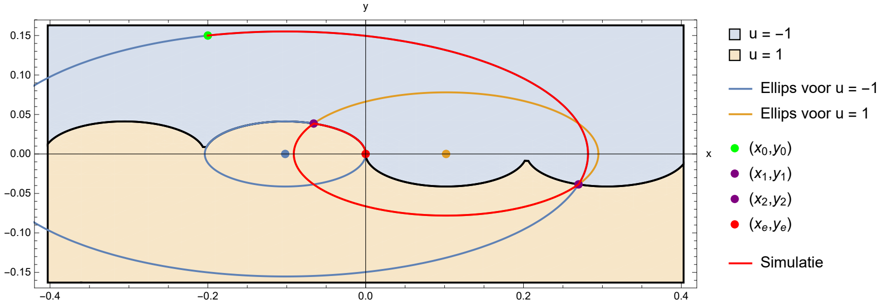
Herinner dat $u = -\operatorname{sgn}(p_2)$. Elke $\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ wisselt p_2 van teken en u ook.



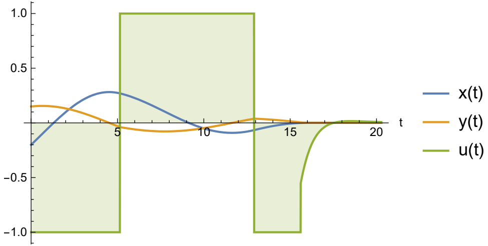
y
x
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
Σ_0
Σ_1
Σ_2
Σ_3
Σ_4



y
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
x
u = −1
u = 1

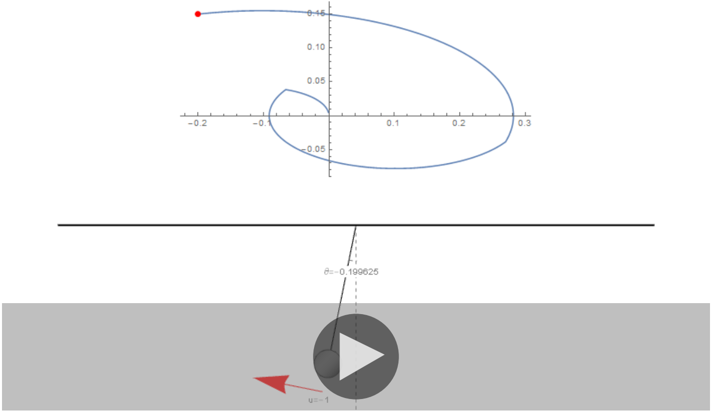


y
x
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
u = −1
u = 1
Ellips voor u = −1
Ellips voor u = 1
(x_0,y_0)
(x_1,y_1)
(x_2,y_2)
(x_e,y_e)
Simulatie



1.0
0.5
−0.5
−1.0
5
10
15
20
t
x(t)
y(t)
u(t)

Animatie



Toepassing: De kraan

Toevoeging aan systeem: karretje op positie r.

We nemen weer $|u| \leq 1$, $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = r$ en $x_4 = \dot{r}$.

Dynamisch systeem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

met

$$x(0) = (0, 0, r_0, 0)^T, \quad x(T) = (0, 0, 0, 0)^T.$$

Optimale regelaar

Kostenfunctie

$$J(x,u) = \int_0^{T_*} 1 \mathrm{d}t = T_*$$

en Hamiltoniaan

$$H(x,p,u) = p^T f + L = \left(x_2 p_1 + \left(-\frac{g}{\ell} - \frac{1}{\ell} u \right) p_2 + x_4 p_3 + u p_4 \right) + 1.$$

Optimale regelaar

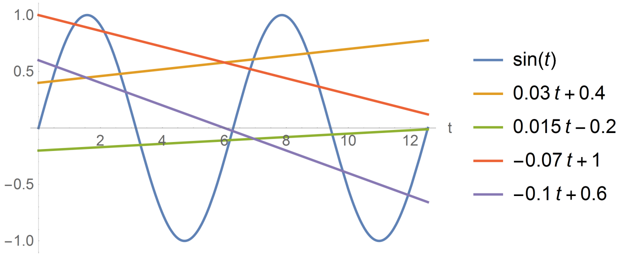
$$u = \operatorname*{argmin}_v H(x,p,v) = -\operatorname{sgn}\left(p_4 - \frac{1}{\ell} p_2 \right).$$

De functie p_4 heeft de vorm

$$C_1 t + C_2$$

en de functie p_2 heeft de vorm

$$C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + C_4\right).$$



Oplossing

Zelfde aanpak als slinger: kijk naar de switchtijden.

Kijk ook naar de losse systemen: het karretje en de slinger.

Eén en drie switchtijden.

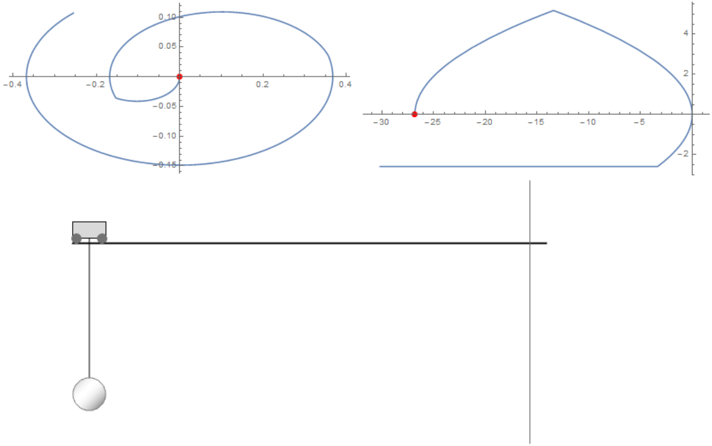
Eén switchtijd

Laat

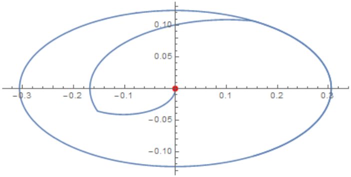
$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < t_1 \\ -1 & t_1 \leq t < T \\ 0 & T \leq t \end{cases} .$$

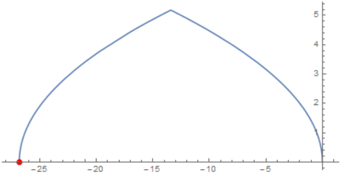
Voor welke t_1 is er een oplossing die voldoet aan begin- en eindvoorwaarden?

Als $t_1 \neq T/2$: geen oplossing

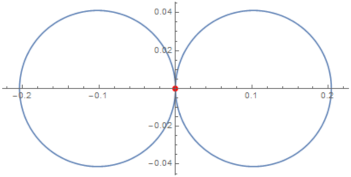


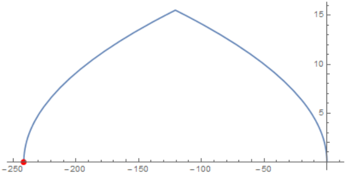
Als $t_1 \neq 2n\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$: geen oplossing

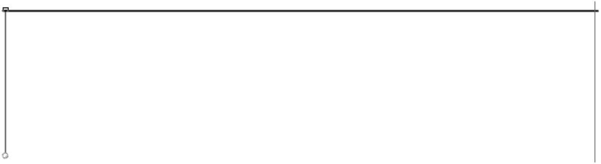




Als $t_1 = 2n\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$: oplossing!







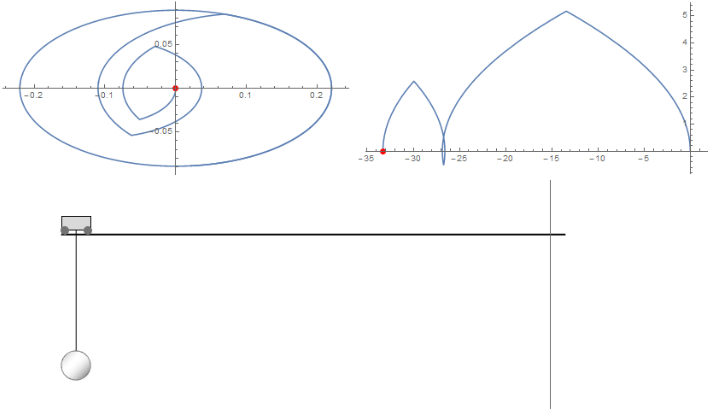
Drie switchtijden

We nemen

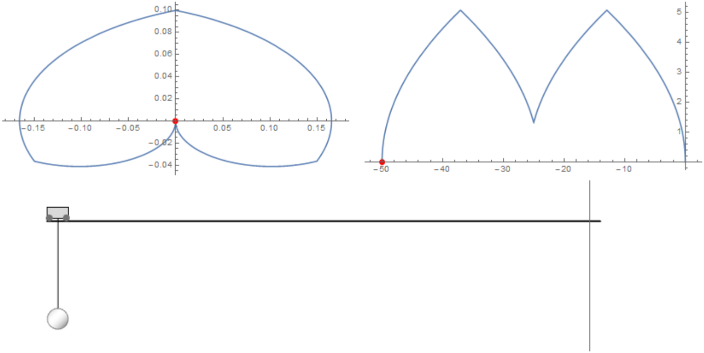
$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < t_1 \\ -1 & t_1 \leq t < t_2 \\ 1 & t_2 \leq t < t_3 \\ -1 & t_3 \leq t < T \\ 0 & T \leq t \end{cases}.$$

Totaal moet kloppen: $(t_1 - 0) + (t_3 - t_1) = (t_2 - t_1) + (T - t_3)$.

Als $t_2 \neq T/2$: geen oplossing



Als $t_2 = T/2$: voor elke $t_1 > 0$ een oplossing!



Oplossing voor probleem

Manier vinden om voor een r_0 bijbehorende t_1 te vinden.

Ook analyse van twee, vier en vijf switchpunten.

Drie is altijd tijd-optimaal!

Conclusie

Oplossing voor *bang-bang* regelaar voor slinger en kraan.

Alleen theorie voor optimale regelaars toepassen geen resultaat.

Andere oplossingen staan in verslag.

Bedankt voor jullie aandacht!

Het verslag staat op *http://hiddewieringa.nl/projects*.